

# Capitolo Ottavo

## L'INTEGRALE INDEFINITO

### § 1. IL PROBLEMA DELLE PRIMITIVE, INTEGRALI IMMEDIATI

Ricordiamo che un insieme  $A (\subset \mathbb{R})$  è detto *aperto* se è intorno di ogni suo punto, ossia se, per ogni  $x \in A$ , esiste un intervallo aperto di centro  $x$  contenuto in  $A$ .

**DEFINIZIONE.** Siano dati un insieme aperto  $A (\subset \mathbb{R})$  e una funzione  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremo che una funzione  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  è una *primitiva* della  $f$  se  $F$  è derivabile in  $A$  e risulta  $F'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in A$ .

Una funzione  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  è detta *primitivabile* se è dotata di primitive, ossia se esiste una funzione  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  che sia una primitiva della  $f$ .

Se  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  è primitivabile, l'insieme di tutte le sue primitive è detto *l'integrale indefinito* della  $f$  e si indica con il simbolo  $\int f(x) dx$ .

È dunque

$$\int f(x) dx := \{F: F'(x) = f(x), \forall x \in A\}.$$

L'integrazione indefinita è il problema inverso di quello della derivazione.

Assegnato un insieme aperto  $A$ , la derivazione è un'applicazione  $D$  dell'insieme delle funzioni reali derivabili in  $A$  in quello di tutte le funzioni di  $A$  in  $\mathbb{R}$ . Questa applicazione non è né iniettiva né suriettiva. Sappiamo, infatti, che due funzioni derivabili che differiscono per una costante additiva hanno la medesima derivata. Inoltre, si può dimostrare che, in accordo con l'intuizione, la funzione di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  che vale 1 nei punti razionali e vale 0 in quelli irrazionali non è la derivata di nessuna funzione.

Si pone in modo naturale il problema seguente: Data una funzione  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , ricercare la sua controimmagine  $D^{-1}(f)$ . Dobbiamo, in altre parole, rispondere alle due seguenti questioni:

- Esistenza di primitive della  $f$ .
- Ricerca di *tutte* le primitive della  $f$ .

Quanto al primo problema, ci limitiamo a enunciare un risultato che verrà dimostrato solo nel Capitolo 13, dopo aver studiato l'integrale di Riemann.

**TEOREMA 1.** Ogni funzione  $f: A (\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  definita e continua in un aperto  $A$  è dotata di primitive in  $A$ . ■

Segnaliamo che la continuità della  $f$  non è condizione necessaria per la sua primitivabilità.

**ESEMPIO.** 1) La funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0, ma sappiamo che essa è la derivata della funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Passiamo al secondo problema. Anche in questo caso le nostre ambizioni sono molto modeste. Ci limiteremo alla ricerca di primitive di particolari classi di funzioni *continue* e definite su *intervalli aperti*.

Cominciamo con il richiamare un risultato già noto (cfr. Cap. 7, Corollario 16, Prop. 2).

**TEOREMA 2.** *Siano dati un intervallo  $I$ , una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  e una sua primitiva  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Sono allora primitive della  $f$  (tutte e) sole le funzioni  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  che differiscono dalla  $F$  per una costante additiva, ossia le funzioni definite da  $G(x) = F(x) + c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .*

**DIM.** Sia  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  una qualunque primitiva della  $f$ . Consideriamo la funzione  $H: I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $H(x) = G(x) - F(x)$ . La  $H$  è derivabile in  $I$  e si ha  $H'(x) = 0$  per ogni  $x \in I$ . Applicando il Teorema di Lagrange, si ottiene che esiste un  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $H(x) = c$  per ogni  $x \in I$ . È dunque, sempre per ogni  $x \in I$ ,  $G(x) = F(x) + c$ . Il viceversa è ovvio. ■

È importante tener presente che, per la validità del teorema è essenziale che il dominio della  $f$  sia un intervallo.

Supponiamo infatti che il dominio  $A$  sia dato dalla riunione di due aperti disgiunti  $A_1$  e  $A_2$ . Detta  $F$  una primitiva della  $f$ , consideriamo la funzione  $G: A \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + 1, & \text{se } x \in A_1 \\ F(x) + 2, & \text{se } x \in A_2 \end{cases}.$$

La  $G$  è una primitiva della  $f$ , ma non differisce dalla  $F$  per una costante additiva.

Vediamo la cosa in un caso particolare.

**ESEMPIO.** 2) Consideriamo la funzione  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Le primitive della  $f$  sono tutte e sole le funzioni  $F_{a,b}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} \log|x| + a, & \text{se } x < 0 \\ \log|x| + b, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Ci permetteremo tuttavia, per ragioni di comodità, espressioni del tipo  $\int_x^1 \frac{1}{t} dt = \log|x| + c$ , pur sapendo che non si tratta di un'uguaglianza vera e propria, ma solo di un modo comodo di esprimersi.

Quanto sopra visto è riassunto dalle due seguenti uguaglianze:

– Se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è primitivabile, allora si ha

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x), \quad \forall F \in \int f(x) \, dx.$$

– Se  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile, allora si ha

$$\int \frac{d}{dx} F(x) \, dx = \{F(x) + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}\}.$$

Per cominciare, osserviamo che è immediato trovare una primitiva di un certo numero di funzioni elementari, in quanto basta leggere al contrario la tavola delle derivate. Si ottiene così la seguente Tabella.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$x^\alpha$ ; con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\log x  + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c = -\arccos x + c'$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c'$
$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x + c$
$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x + c$
$\frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$	$\operatorname{Th} x + c$
$\frac{1}{\operatorname{Sh}^2 x}$	$-\operatorname{Cth} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c$ , per $x > 0$ $-\operatorname{arccosh}(-x) + c = -\log(-x + \sqrt{x^2-1}) + c$ , per $x < 0$
$e^x$	$e^x + c$
$a^x$	$\frac{1}{\log a} a^x + c$

In questa Tabella abbiamo indicato l'integrale indefinito nella forma  $F(x) + c$ . Ricordiamo che la formula è esatta solo se il dominio  $A$  della funzione integranda  $f$  è un intervallo; in caso contrario, si intende che si pensa la  $f$  ristretta ad *uno* degli intervalli che compongono  $A$ . Si tenga presente che un insieme aperto  $A$  o è un intervallo aperto o è la riunione di intervalli aperti a due a due disgiunti (in numero finito o infinito). Per trovare *tutte* le primitive, bisognerebbe assegnare in modo *indipendente* una costante per ciascuno degli intervalli che compongono  $A$ .

A proposito dell'integrale di  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  e di  $\frac{1}{x^2+1}$ , ricordiamo che è  $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$  e  $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ .

Prima di proseguire, facciamo un'osservazione importante, anche se la cosa può apparire banale. Per controllare l'esattezza del calcolo di un integrale indefinito basta effettuare la derivata del risultato.

## § 2.1 METODI D'INTEGRAZIONE

Vogliamo ora stabilire delle regole di integrazione che, come vedremo, si deducono da quelle di derivazione. È però indispensabile mettere subito in chiaro una cosa. Mentre il calcolo delle derivate è di tipo meccanico, nel senso che, data una funzione derivabile espressa mediante funzioni elementari, è immediato calcolare la sua derivata e questa è espressa ancora mediante funzioni elementari, ben diversa è la situazione per quanto riguarda il calcolo degli integrali indefiniti. Esistono infatti funzioni elementari continue e quindi primitivabili che non si possono integrare con metodi semplici, ma solo, eventualmente, con tecniche più raffinate quali, per esempio, gli sviluppi in serie.

**ESEMPIO.** 1) Consideriamo la funzione  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ . Malgrado l'aspetto innocuo, questa funzione non si lascia integrare per via elementare.

Vedremo che, per contro, la funzione  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $g(x) = \frac{x}{e^x}$  è integrabile elementarmente.

Non è dunque possibile acquisire una tecnica universale per il calcolo degli integrali indefiniti, come si fa per quello delle derivate. Si possono però stabilire alcuni *metodi* o *regole* d'integrazione che risultano applicabili in moltissimi casi.

### Metodo d'integrazione per decomposizione

Dai Teoremi sulla derivata della somma e di  $cF$  si ottiene subito il

**TEOREMA 3.** Se le due funzioni  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  sono primitivabili su un intervallo  $I$  e se  $F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$  sono due primitive, rispettivamente di  $f$  e di  $g$ , allora, quali che siano  $a, b \in \mathbb{R}$ , è primitivabile anche la funzione  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $h(x) = af(x) + bg(x)$  e una primitiva di  $h$  è data dalla funzione  $H: I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $H(x) = aF(x) + bG(x)$ .

Ciò si esprime con la scrittura

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

**DIM.** Basta osservare che è  $D(aF(x) + bG(x)) = af(x) + bg(x)$ . ■

Il risultato di questo teorema si esprime dicendo che: *La combinazione lineare di funzioni primitivabili è primitivabile e che le sue primitive sono date dalla combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, delle primitive delle funzioni date.*

**ESEMPIO.** 2) Si ha:  $\int (3 \cos x + \frac{2}{x}) dx = 3 \int \cos x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx =$   
 $= 3 \sin x + c_1 + 2 \log|x| + c_2 = 3 \sin x + 2 \log|x| + c.$

### Metodo d'integrazione per parti

Dal Teorema sulla derivata del prodotto si ottiene il

**TEOREMA 4.** Siano  $F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni di classe  $C^1$  su un intervallo  $I$  e siano  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  le corrispondenti derivate. Allora sono primitivabili in  $I$  anche le funzioni  $Fg$  e  $fG$  e se  $H: I \rightarrow \mathbb{R}$  è una primitiva di  $fG$ , una primitiva di  $Fg$  è data da  $FG - H$ .  
 Ciò si esprime con la scrittura:

$$\int F(x) g(x) dx = F(x) G(x) - \int f(x) G(x) dx.$$

**DIM.** Le funzioni  $Fg$  e  $fG$  sono continue e quindi primitivabili. Detta  $H: I \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $fG$ , si ha:

$$D(F(x) G(x) - H(x)) = f(x) G(x) + F(x) g(x) - f(x) G(x) = F(x) g(x). \blacksquare$$

**ESEMPIO.** 3) Si vuol calcolare  $\int x \log x dx$ . Posto  $F(x) = \log x$  e  $g(x) = x$ , si può assumere  $G(x) = \frac{x^2}{2}$ . Applicando la formula di integrazione per parti, si ottiene

$$\int x \log x dx = \int \log x D\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c.$$

Vediamo di capire bene come si usa questo risultato.

Supponiamo di dover calcolare l'integrale indefinito del prodotto delle due funzioni  $f$  e  $g$  definite su un intervallo  $I$  e di conoscere una primitiva  $G$  della funzione  $g$ . Possiamo allora scrivere

$$\int f(x) g(x) dx = \int f(x) G'(x) dx.$$

Diamo, in tal caso, al fattore  $f(x)$  il nome di *fattore finito* e a  $g(x) = G'(x)$  quello di *fattore differenziale*. Se poi la  $f$  è derivabile in  $I$ , possiamo applicare il metodo di integrazione per parti. Se anche  $g$  è derivabile e conosciamo sia una primitiva  $F$  della  $f$ , sia una primitiva  $G$  della  $g$ , è, almeno a priori, indifferente scegliere la  $f$  come fattore finito e la  $g$  come fattore differenziale o viceversa. Molto spesso però, nella pratica, la scelta è obbligata o almeno favorita da ragioni di opportunità.

**ESEMPL.** 4) Si vuol calcolare  $\int x e^x dx$ . Assunto  $e^x$  come fattore finito, si ha:

$$\int x e^x dx = \int D\left(\frac{x^2}{2}\right) e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx.$$

Ci si riduce così ad un problema più difficile di quello di partenza. Assunto, invece, come fattore finito  $x$ , si ha facilmente

$$\int x e^x dx = \int x D(e^x) dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

5) Si vuol calcolare  $\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx$ . Assunto  $\log x$  come fattore finito, si ha:

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + c.$$

$$\begin{aligned} 6) \quad \int x e^x \cos x dx &= \int x e^x D(\sin x) dx = x e^x \sin x - \int (e^x + x e^x) \sin x dx = \\ &= x e^x \sin x + \int (e^x + x e^x) D(\cos x) dx = x e^x \sin x + (e^x + x e^x) \cos x - \int (2e^x + x e^x) \cos x dx = \\ &= x e^x (\sin x + \cos x) + e^x \cos x - 2 \int e^x \cos x dx - \int x e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Si ricava così l'espressione

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} x e^x (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Ora, con la solita tecnica, si ottiene:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx,$$

da cui 
$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c.$$

Si conclude così finalmente che è:

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} x e^x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} e^x \sin x + c.$$

7) Si ha 
$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c.$$

**N. B.** Non sempre un tale procedimento ha successo. Lo si constata facilmente tentando di applicarlo a funzioni come  $\frac{e^x}{x}$ ,  $\frac{\sin x}{x}$  e simili.

### Metodi d'integrazione per sostituzione

Dal Teorema sulla derivazione delle funzioni composte si ricava il

**TEOREMA 5.** Sono date due funzioni componibili  $f: I = ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: J = ]c, d[ \rightarrow I$ , con  $f$  continua e  $g$  derivabile. Allora, se  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  è una primitiva della  $f$ , la funzione  $F(g(x)): J \rightarrow \mathbb{R}$  è una primitiva di  $f(g(x))g'(x)$ . Ciò si esprime scrivendo:

$$(*) \quad \int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du, \text{ con } u = g(x).$$

**DIM.** Se  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $F'(u) = f(u)$ , allora, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ha  $D(F(g(x))) = f(g(x))g'(x)$ . ■

Il Teorema ora dimostrato ci permette di calcolare l'integrale posto a primo membro della (\*) a patto di saper calcolare il secondo.

**ESEMPLI.** 8) Si voglia calcolare  $\int \sin^2 x \cos x dx$ . Posto  $u = g(x) = \sin x$ ,  $g'(x) = \cos x$ , si ha

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + c = \frac{1}{3} \sin^3 x + c.$$

9) Si voglia calcolare  $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$ . Posto  $u = g(x) = x^2 + 1$ , da cui  $g'(x) = 2x$ , si ha

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \log|u| + c = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + c.$$

10) Si voglia calcolare  $\int \cos^2 x dx$ . Posto  $u = 2x$ , si ha

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \int \cos u du = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin u + c = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c. \end{aligned}$$

Si trova, in modo analogo, che è

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c.$$

11) Si voglia calcolare  $\int \operatorname{tg} x dx$ . Posto  $u = g(x) = \cos x$ , si ha

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = - \log|u| + c = - \log|\cos x| + c.$$

In modo analogo si calcolano gli integrali indefiniti delle funzioni cotangente, tangente e cotangente iperboliche (cfr. la Tabella di pg. 166).

12) Si voglia calcolare  $\int \arcsin x dx = \int 1 \cdot \arcsin x dx$ . Integrando per parti e ponendo  $u = x^2$ , si ha

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = x \arcsin x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} dx = \\ &= x \arcsin x + \int \frac{-du}{2\sqrt{1 - u}} = x \arcsin x + \sqrt{1 - u} + c = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c. \end{aligned}$$

In modo analogo si calcolano gli integrali indefiniti delle funzioni arcocoseno, arcotangente, arcotangente iperbolica, etc. (cfr. la Tabella di pg. 166).

Ma l'uguaglianza (\*) letta al contrario permette, sotto opportune ipotesi, anche di calcolare il secondo membro, a patto di saper calcolare il primo.

**TEOREMA 6.** Sono date due funzioni componibili  $f: I = ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: J = ]c, d[ \rightarrow I$ , con  $f$  continua e  $g$  biettiva e di classe  $C^1$  assieme alla sua inversa  $\varphi: I \rightarrow J$ . Allora, se  $F(t): J \rightarrow \mathbb{R}$  è una primitiva di  $f(g(t)) g'(t)$ , la funzione  $F(\varphi(x)): I \rightarrow \mathbb{R}$  è una primitiva di  $f(x)$ . Ciò si esprime con la scrittura

$$(**) \quad \int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt, \text{ con } t = \varphi(x).$$

**DIM.** Sia dunque  $F(t): J \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $f(g(t)) g'(t)$ . Tenuto conto che si ha  $g'(t) = 1/\varphi'(x)$ , con  $x = g(t)$ , si ottiene

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(t) \varphi'(x) = f(g(t)) g'(t) \varphi'(x) = f(g(t)) = f(x). \blacksquare$$

Questo risultato ci dice che, se si deve calcolare l'integrale indefinito di una funzione continua  $f: I = ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , si può cercare una funzione  $g: J = ]c, d[ \rightarrow I$  biettiva e di classe  $C^1$  assieme alla sua inversa, calcolare  $\int f(g(t)) g'(t) dt$  e sostituire poi  $\phi(x)$  a  $t$ .

**ESEMPLI.** 13) Si voglia calcolare  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ . Deve essere  $x \in [-1, 1]$ . Si può allora porre  $x = g(t) = \sin t$ , con  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ , da cui  $g'(t) = \cos t$ . Si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \\ &= \frac{t + \sin t \cos t}{2} + c = \frac{1}{2} (t + \sin t \sqrt{1-\sin^2 t}) + c = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + c. \end{aligned}$$

14) Si voglia calcolare  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ . Deve essere  $x \geq 0$ . Posto  $x = g(u) = u^2$ , con  $u \geq 0$ , si ha

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^u u du = u e^u - e^u + c = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + c.$$

Possiamo così ampliare la lista degli integrali indefiniti delle funzioni elementari:

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\log x$	$x \log x - x + c$
$\log_a x$	$\frac{1}{\log a} (x \log x - x) + c$
$\operatorname{tg} x$	$-\log  \cos x  + c$
$\operatorname{ctg} x$	$\log  \sin x  + c$
$\operatorname{arctg} x$	$x \operatorname{arctg} x - (1/2) \log(x^2 + 1) + c$
$\operatorname{arcctg} x$	$x \operatorname{arcctg} x + (1/2) \log(x^2 + 1) + c$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$
$\operatorname{Th} x$	$\log \operatorname{Ch} x + c$
$\operatorname{Cth} x$	$\log  \operatorname{Sh} x  + c$
$\operatorname{arcsinh} x$	$x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + c$
$\operatorname{arccosh} x$	$x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2 - 1} + c$
$\operatorname{arctgh} x$	$x \operatorname{arctgh} x + (1/2) \log 1-x^2  + c$
$\operatorname{arcctgh} x$	$x \operatorname{arcctg} x - (1/2) \log x^2 - 1  + c$



### § 3. INTEGRALE INDEFINITO DELLE FUNZIONI RAZIONALI

In questo paragrafo ci occuperemo del problema dell'integrazione delle funzioni razionali.

Per quanto riguarda le funzioni razionali intere, ossia quelle rappresentate da polinomi, non ci sono difficoltà. Occupiamoci delle funzioni razionali non intere. Supponiamo dunque di dover calcolare

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

con  $P(x)$  e  $Q(x)$  polinomi. Se il grado di  $P(x)$  è maggiore o uguale a quello di  $Q(x)$ , effettuando la divisione si ottiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove il grado di  $R(x)$  è minore di quello di  $Q(x)$ . Il problema è così ricondotto a quello dell'integrazione di una funzione razionale in cui il numeratore ha grado minore del denominatore.

Supponiamo dunque che nell'integrale di partenza sia  $\text{gr } P(x) < \text{gr } Q(x)$ .

L'idea è quella di scomporre la frazione  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  nella somma di funzioni razionali di più facile integrazione.

**ESEMPIO.** 1) Supponiamo di voler calcolare  $\int \frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$ . Si ha immediatamente

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1},$$

da cui

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \log|x| + \arctg x + c.$$

Passiamo al caso generale. Sappiamo (cfr. Cap. 4, Teor. 9) che un polinomio a coefficienti reali può essere scomposto in fattori di primo e secondo grado con discriminante negativo.

Sussiste ora il seguente risultato del quale omettiamo la dimostrazione.

**TEOREMA 7.** (di Hermite) - È data una funzione razionale  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , con

$$Q(x) = a(x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2} \dots (x - a_h)^{r_h}(x^2 + b_1x + c_1)^{s_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{s_2} \dots (x^2 + b_kx + c_k)^{s_k},$$

essendo  $r_1 + r_2 + \dots + r_h + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_k) = n = \text{gr } Q > \text{gr } P(x)$ . Esistono allora  $n$  costanti reali  $A_i, B_j, C_j, D_l$ , con  $i = 1, 2, \dots, h, j = 1, 2, \dots, k, l = 0, 1, \dots, m - 1$ , con  $m = n - h - 2k$ , per cui si ha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^h \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{j=1}^k \frac{B_jx + C_j}{x^2 + b_jx + c_j} + \frac{d}{dx} \frac{D_0 + D_1x + D_2x^2 + \dots + D_{m-1}x^{m-1}}{T(x)},$$

essendo

$$T(x) = (x - a_1)^{r_1-1} \dots (x - a_h)^{r_h-1} (x^2 + b_1x + c_1)^{s_1-1} \dots (x^2 + b_kx + c_k)^{s_k-1}. \blacksquare$$

**ESEMPLI.** 2) Data la funzione  $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)}$ , cerchiamo tre costanti  $A, B, C$  tali che:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Si ottiene  $x+2 = (A+B)x^2 + (C-B)x + A-C$ ,

da cui, per il *Principio di identità dei polinomi*, si ricava il sistema 
$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=1 \\ A-C=2 \end{cases},$$

che ha per soluzioni:  $A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{3}{2}, \quad C = -\frac{1}{2}.$

Si conclude così con l'uguaglianza

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3x+1}{2(x^2+1)}.$$

3) Data la funzione  $f(x) = \frac{x^2+2}{(x^2-1)^2}$ , cerchiamo quattro costanti  $A, B, C, D$  tali che:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{(x^2-1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+D}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{-Cx^2-2Dx-C}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{(A+B)x^3 + (A-B-C)x^2 - (A+B+2D)x - (A-B+C)}{(x^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Per il *Principio di identità dei polinomi*, si ricava il sistema 
$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B-C=1 \\ A+B+2D=0 \\ A-B+C=-2 \end{cases},$$

che ha per soluzioni:  $A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{3}{2}, \quad D = 0.$

Si conclude così con l'uguaglianza

$$\frac{x^2+2}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{d}{dx} \frac{3x}{2(x^2-1)}.$$

4) Data la funzione  $f(x) = \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}$ , cerchiamo quattro costanti  $A, B, C, D$  tali che:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{D}{x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} - \frac{D}{x^2} = \\ &= \frac{(A+B)x^3 + (C-D)x^2 + Ax - D}{x^2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Per il *Principio di identità dei polinomi*, si ricava il sistema 
$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-D=0 \\ A=-D=1 \end{cases},$$

che ha per soluzioni:  $A = 1, \quad B = C = D = -1.$

Si conclude così con l'uguaglianza

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{d}{dx} \frac{1}{x}.$$

Il problema dell'integrazione delle funzioni razionali è dunque ricondotto a quello dell'integrazione di funzioni di uno dei seguenti tipi:

$$\frac{A}{x-a}; \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \text{ con } p^2-4q < 0; \quad \frac{d}{dx} \frac{D(x)}{T(x)}.$$

Per le funzioni del primo e del terzo tipo non ci sono difficoltà. Resta il problema di integrare le funzioni del secondo tipo. Possiamo scrivere

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} = \frac{B}{2} \frac{2x+2C/B}{x^2+px+q} = \frac{B}{2} \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{2C-Bp}{2(x^2+px+q)}.$$

Essendo 
$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \log(x^2+px+q) + c,$$

il tutto si riduce al calcolo dell'integrale di una funzione del tipo  $\frac{1}{x^2+px+q}$ , con  $p^2-4q < 0$ . Ora si ha:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + \frac{4q-p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} = \frac{4q-p^2}{4} \left[ \left( \frac{2(x+p/2)}{\sqrt{4q-p^2}} \right)^2 + 1 \right].$$

È dunque

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{4}{4q-p^2} \int \frac{dx}{\left( \frac{2(x+p/2)}{\sqrt{4q-p^2}} \right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} t + c,$$

dove si è posto 
$$t = \frac{2(x+p/2)}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

In conclusione, si ha 
$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2(x+p/2)}{\sqrt{4q-p^2}} + c.$$

**ESEMPLI.** 5) Si ha: 
$$\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{3x+1}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \log|x-1| - \frac{3}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \log|x-1| - \frac{3}{4} \log(x^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.$$

6) Si ha: 
$$\int \frac{(x+5)dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + 3\sqrt{3} \int \frac{(2/\sqrt{3})dx}{(4/3)(x+1/2)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + 3\sqrt{3} \operatorname{arctg} [(2/\sqrt{3})(x+1/2)] + c.$$

7) Si ha: 
$$\int \frac{(x^2+2)dx}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \int \left( \frac{d}{dx} \frac{3x}{2(x^2-1)} \right) dx =$$

$$= \frac{-1}{4} \log|x-1| + \frac{1}{4} \log|x+1| - \frac{3x}{2(x^2-1)} + c.$$

8) Si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2(x^2+1)} dx &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(x+1)dx}{x^2+1} - \int \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= \log|x| - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + c. \end{aligned}$$

#### § 4. INTEGRAZIONE DI ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI

Prima di esporre ancora qualche altro esempio e di mostrare qualche altro 'trucco' per il calcolo degli integrali indefiniti di particolari classi di funzioni irrazionali o trascendenti, ricordiamo che, come abbiamo già detto, ci sono delle funzioni continue che non si lasciano integrare con metodi elementari, ossia utilizzando i teoremi visti nel § 2. Fra queste funzioni ribelli ce ne sono alcune molto importanti; ne segnaliamo qualcuna:

$$\frac{e^x}{x}; \quad \frac{\sin x}{x}; \quad \sin x^2; \quad e^{x^2}; \quad \frac{1}{\log x}.$$

In moltissimi casi, per integrare funzioni irrazionali o trascendenti, si effettua una sostituzione *razionalizzante*, ossia tale da ricondurre il problema a quello dell'integrazione di funzioni razionali che, almeno in teoria, sappiamo effettuare. Diciamo "almeno in teoria", dato che il primo passo per integrare una funzione razionale è quello di scomporre in fattori il polinomio al denominatore e già questo può risultare tutt'altro che banale.

**ESEMPIO.** 1) Si voglia calcolare  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$ . Posto  $\frac{x}{x+1} = t^2$ , si ha

$$x = \frac{t^2}{1-t^2}; \quad dx = \frac{2t dt}{(1-t^2)^2}.$$

Si ottiene

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = -2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \log|t+1| - \log|t-1| + c =$$

$$= \log \left| \sqrt{\frac{x}{x+1}} + 1 \right| - \log \left| \sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1 \right| + c.$$

Più in generale, se si deve calcolare  $\int f(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}) dx$ , essendo  $f$  una funzione razionale e  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , si effettua la sostituzione  $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^n$ . Se è invece  $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ , basta osservare che deve essere  $\alpha = \rho\gamma$  e  $\beta = \rho\delta$ ; il radicando è dunque costante e uguale a  $\sqrt[n]{\rho}$ .

**ESEMPIO.** 2) Si voglia calcolare  $\int \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx$ . Si ha:

$$\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{(x-1)(2-x)} = (x-1) \sqrt{\frac{2-x}{x-1}}.$$

Si ottiene dunque  $\int \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx = \int (x - 1) \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} dx$  che è del tipo dell'Esempio precedente e si tratta allo stesso modo.

E così per calcolare  $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ , con  $f$  funzione razionale e  $b^2 - 4ac > 0$ .

**ESEMPIO. 3)** Si voglia calcolare  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$  Si ha

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{(2x - 1) dx}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \int \frac{dx}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Effettuando la sostituzione  $x^2 - x + 1 = (x + t)^2$ , si ha:

$$x = -\frac{t^2 - 1}{2t + 1}; \quad dx = -\frac{2t^2 + t + 1}{(2t + 1)^2} dt; \quad \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1}.$$

Si ottiene  $\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{2dt}{2t + 1} = -\frac{1}{2} \log|2t + 1| + c$ , con  $t = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$ .

In conclusione, si ha:  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{1}{2} \log|2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x + 1| + c$ .

E così per calcolare  $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ , con  $f$  funzione razionale,  $a > 0$  e  $b^2 - 4ac < 0$ .

**ESEMPIO. 4)** Si voglia calcolare  $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx$ . Posto  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , si ha:

$$\begin{aligned} x = 2 \arctg t; \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}. \quad \text{È dunque: } \int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx &= \int \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2(1 + t^2)} dt = \\ &= \int \frac{2}{t} dt - \int \frac{2t dt}{1 + t^2} + \int \frac{dt}{t^2} = 2 \log|t| - \log(t^2 + 1) - \frac{1}{t} + c = 2 \log|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| - \log(\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2}) + 1) - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

E così per calcolare  $\int f(\sin x, \cos x) dx$ , con  $f$  funzione razionale.

Occupiamoci ora dei cosiddetti *integrali binomi*. Si tratta di integrare una funzione del tipo

$$f(x) = x^m(a + bx^n)^p, \quad \text{con } m = \frac{m'}{n'}, n = \frac{n'}{n''}, p = \frac{p'}{p''} \text{ numeri razionali.}$$

Il problema è risolto dal seguente Teorema, del quale omettiamo la dimostrazione, che dà una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità per via elementare di queste funzioni.

**TEOREMA 8.** Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = x^m(a + bx^n)^p, \quad \text{con } m, n, p \text{ numeri razionali,}$$

è integrabile elementarmente se e solo se risulta intero uno dei tre seguenti numeri

$$p, \quad \frac{m + 1}{n}, \quad \frac{m + 1}{n} + p. \blacksquare$$

Vediamo, con esempi come si procede in ciascuno dei tre casi. Se  $p$  è un intero  $\geq 0$ , non ci sono problemi, dato che il tutto si riduce ad integrare funzioni del tipo  $x^r$ .

**ESEMPIO.** 5) Si voglia calcolare  $\int x^{(1/2)}(1 + x^{(1/3)})^{-1} dx$ .

Si pone  $x = t^6 = m.c.m.(2, 3) = m.c.m.(m'', n'')$ . Risulta:

$$\begin{aligned}\int x^{(1/2)}(1 + x^{(1/3)})^{-1} dx &= 6 \int \frac{t^8}{1 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^8 - 1}{1 + t^2} dt + 6 \int \frac{dt}{1 + t^2} = \\ &= 6 \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1) dt + 6 \operatorname{arctg} t = \frac{6}{7} t^7 - \frac{6}{5} t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \operatorname{arctg} t + c = \dots \text{con } t = x^{(1/6)}.\end{aligned}$$

6) Si voglia calcolare  $\int x^{(1/2)}(1 + x^{(1/4)})^{(1/3)} dx$ .

Si ha  $\frac{m+1}{n} = 6$ . Si pone  $1 + x^{(1/4)} = t^3 = t^{p''}$ . Risulta:

$$x^{(1/4)} = t^3 - 1; \quad x^{(1/2)} = (t^3 - 1)^2; \quad \frac{1}{4} x^{(-3/4)} dx = 3t^2 dt; \quad dx = 12t^2 x^{(3/4)} dt = 12t^2 (t^3 - 1)^3 dt.$$

Si ottiene  $\int x^{(1/2)}(1 + x^{(1/4)})^{(1/3)} dx = 12 \int t^3 (t^3 - 1)^5 dt = \dots$  con  $t = (1 + x^{(1/4)})^{(1/3)}$ .

7) Si voglia calcolare  $\int x^{(2/3)}(1 - x^{(1/2)})^{(-1/3)} dx$ .

Si ha  $\frac{m+1}{n} + p = 3$ . Si pone  $(1 - x^{(1/2)})/x^{(1/2)} = x^{(-1/2)} - 1 = t^3 = t^{p''}$ . Risulta:

$$\begin{aligned}x^{(-1/2)} &= t^3 + 1; \quad x^{(2/3)} = (t^3 + 1)^{(-4/3)}; \\ (1 - x^{(1/2)})^{(-1/3)} &= (t^3 x^{(1/2)})^{(-1/3)} = t^{-1} x^{(-1/6)} = t^{-1} (t^3 + 1)^{(1/3)}; \\ -\frac{1}{2} x^{(-3/2)} dx &= 3t^2 dt; \quad dx = -6t^2 x^{(3/2)} dt = -6t^2 (t^3 + 1)^{-3} dt.\end{aligned}$$

Si ottiene  $\int x^{(2/3)}(1 - x^{(1/2)})^{(-1/3)} dx = -6 \int t (t^3 + 1)^{-4} dt = \dots$  con  $t = (x^{(1/2)} - 1)^{(1/3)}$ .

## § 5. ESERCIZI

1) Si calcolino gli integrali indefiniti delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}; \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}; \quad \frac{\log^2 x}{x^3}; \quad \frac{x+1}{x^2 + 4x}; \quad \frac{2x+1}{x^4} e^{(1/x)}; \quad \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}}; \quad \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}; \\ &\frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}; \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}; \quad \frac{\sqrt{1-x}}{x}; \quad \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^4}; \quad \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{\log^2 x}{\sqrt{x^3}}; \\ &\operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}; \quad \frac{x}{(x+1)^2}; \quad \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}; \quad \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + 4x^2}; \quad \frac{1}{\sin x \cos x}; \quad \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}; \quad \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}; \\ &\sin 2x \sin 3x; \quad x^2 e^{2x}; \quad x \log x - 2x; \quad x e^{-\sqrt{x}}; \quad 4^{2-3x}; \quad x \sqrt[5]{5-x^2}; \quad e^{\sin^2 x} \sin 2x.\end{aligned}$$

2) Si ricerchino le funzioni per cui è  $f''(x) = \operatorname{arctg} x + 1$ .

3) Fra le primitive della funzione  $\frac{x^2}{x^2 + 2}$  si ricerchi quella che in 0 assume il valore 1.

Che risposta si può dare ad un'analogha domanda per la funzione  $\frac{x^2}{x^2 - 2}$ ?